**Variables Aleatorias**

* **Variable Aleatoria Discreta:** es aquella que puede asumir una cantidad finita de **valores enteros**, o una cantidad infinita de **números enteros**. Por ejemplo, en una muestra de 100 personas, contar la cantidad de ellas que tiene hijos.
* **Variable Aleatoria Continua:** es la que puede tomar **cualquier valor numérico en un intervalo** o conjunto de intervalos reales (rangos de números). Por ejemplo, el tiempo que demora una persona en terminar una maratón.

**Análisis de variable aleatoria discreta**

Considera el experimento “lanzar 3 monedas”. Para observar el número de caras (**C**) y sellos (**S**) que se obtienen, el conjunto de unidades o elementos obtenidos del experimento se llama **espacio muestral (Ω)**. Por ejemplo, el espacio muestral del experimento antes descrito es:

$$Ω=\{CCC,CCS,CSC,CSS,SCC,SCS,SSC,SSS)$$

La variable aleatoria en sí, es la condición que yo doy en situaciones donde tengo espacios muestrales diversos.

En este caso asociaremos la variable aleatoria “**X**” al “número de caras obtenidas al lanzar tres monedas”. Usando un diagrama de Venn, observaremos de mejor manera el caso

Donde:

Si **x = 0**, solo habrá **un caso** que será $\left(S,S,S\right) $y a su vez será asociada la probabilidad $\frac{1}{8}$, es decir, solo **un caso de ocho totales**.

Si **x = 1**, solo habrá **3 casos**, que son $\left(C,S,S\right), \left(S,C,S\right) y (S,S,C)$ y a su vez será asociada la probabilidad $\frac{3}{8}$, es decir, **tres casos de ocho totales**.

Si **x = 2**, solo habrá **3 casos**, que son $\left(C,C,S\right), \left(S,C,C\right) y (C,S,C)$ y a su vez será asociada la probabilidad $\frac{3}{8}$, es decir, **tres casos de ocho totales**.

Si **x = 3**, solo habrá **un caso** que será **(C, C, C)** y a su vez será asociada la probabilidad $\frac{1}{8}$, es decir, solo **un caso de ocho totales**.

**Ejemplos del uso de variables aleatorias discretas**

1. Si se lanzan dos dados, el espacio muestral de este experimento aleatorio (mostrado en una tabla) es:



Donde asignaremos la variable aleatoria X a “**la suma de los puntos obtenidos en las caras superiores**”, por lo tanto, los únicos valores serían:

**2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12**

Donde cada uno de ellos será asignado a cada par del espacio muestral **Ω**.

Por ejemplo, a los pares **(1, 4), (2, 3), (3, 2) y (4, 1)** se les asignará el número natural **5**, debido a la condición inicial de la variable aleatoria “suma de los puntos obtenidos en la cara superior”.

A los pares **(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) y (6, 2)** se les asigna el número natural **8**, debido a la condición inicial de la variable aleatoria “suma de los puntos obtenidos en la cara superior.

1. Supongamos que un jugador de fútbol debe ejecutar un penal. Los valores de la variable “**lanzamiento de un penal**” son la conversión o no conversión del penal. Así su espacio muestral será:

**Ω = {Convierte, no convierte}**

Si se le asigna el número **1** al valor “**convierte**” y **0** al valor “**no convierte**”, se habrá definido la variable aleatoria **x**: “**lanzamiento de un penal**”

1. La medida de la estatura de los alumnos y alumnas de un curso es una **variable aleatoria continua**, ya que los valores que puede tomar dicha variable están en un intervalo de números y no está asociado a un único valor.

**Función de probabilidad (de variable aleatoria discreta)**

Es una función cuyo **dominio** (valores de ingreso) son **valores enteros** y su **recorrido** es un **número real** que está entre los valores **0** y **1**.

Y se define formalmente como:

$$f:Z\rightarrow \left[0,1\right]$$

$$x\_{i}\rightarrow f\left(x\_{i}\right)=P[X=x\_{i}]$$

Es decir, una función que toma valores enteros (**Z**) tiene asociada una probabilidad cuyos valores siempre están entre **0** y **1**.

Donde **xi** es el valor que representa el suceso a estudiar, se denomina **función de probabilidad** de la variable discreta **X**.

Si usamos el ejemplo inicial del lanzamiento de tres monedas se tiene:

$$f\left(0\right)=P\left[X=0\right]=P\left(SSS\right)=\frac{1}{8}$$

$$f\left(1\right)=P\left[X=1\right]=P\left(CSS, SCS,SSC\right)=\frac{3}{8}$$

$$f\left(2\right)=P\left[X=2\right]=P\left(CCS, SCC,CSC\right)=\frac{3}{8}$$

$$f\left(3\right)=P\left[X=3\right]=P\left(CCC\right)=\frac{1}{8}$$

**Si lo llevamos a una tabla de datos, nos queda de la siguiente forma:**

Donde **xi** son los valores de la variable independiente

Definiendo lo anterior en una tabla de datos nos quedaría:

|  |
| --- |
| Cantidad de caras obtenidas al lanzar una moneda tres veces |
| **Xi** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **Casos favorables** | 1 | 3 | 3 | 1 |
| $$f\left(x\_{i}\right)=P\left(X=x\_{i}\right)$$ | $$P\left(X=0\right)=\frac{1}{8}$$ | $$P\left(X=1\right)=\frac{3}{8}$$ | $$P\left(X=2\right)=\frac{3}{8}$$ | $$P\left(X=3\right)=\frac{1}{8}$$ |

**Llevado esto a una gráfica, nos queda**



Una función de probabilidad también puede ser definida “por tramos”, es decir por condiciones dependiendo las variables.

**Ejemplo**:

La siguiente función representa la probabilidad de venta de boletos en un cine por hora.

$$f\left(x\right)=P\left(X=X\_{i}\right)=\left\{\begin{array}{c}\frac{x}{6}, si x=1,2\\\frac{6-x}{12}, si x=3, 4,5\\0, en otro caso\end{array}\right.$$

Los valores del **dominio** (**valores de entrada**) son:

**x = {1, 2, 3, 4, 5}**

Los valores de salida (recorrido) están asociadas por las probabilidades respectivas al ser evaluadas, por lo tanto, al evaluar serán

$$f\left(1\right)=\frac{1}{6}$$

$$f\left(2\right)=\frac{2}{6}$$

Como podremos fijarnos, los valores de **x** = **1**, **2**; estarán evaluadas en la primera sentencia de la condición.

$$f\left(3\right)=\frac{6-3}{12}=\frac{3}{12}$$

$$f\left(4\right)=\frac{6-4}{12}=\frac{2}{12}$$

$$f\left(5\right)=\frac{6-5}{12}=\frac{1}{12}$$

Y a su vez, los valores de **x = 3, 4, 5**; estarán evaluadas en la segunda sentencia.

**¿Pero que significa la frase “0, en otro caso”?**

Por ejemplo, si quisiéramos evaluar **f(6)**, ya está fuera del dominio (**valores de entrada**), por lo tanto se asigna el valor 0

$$f\left(6\right)=0$$

Si quisiéramos evaluar un valor decimal, por ejemplo, **f(5,09)**, también está fuera del dominio, por lo tanto también se asignaría el valor cero.

$$f\left(5,09\right)=0$$

El proceso es similar a decir “**cual es la probabilidad de obtener un 7 en la cara superior de un dado usual**”, por lo tanto, sería similar a decir **f(7)** y como sabemos que solo hay 6 caras, la probabilidad asociada a esa función **sería 0**, es decir, **imposible**.

**Observación**: la suma de las probabilidades asociadas a una **FUNCION DE PROBABILIDAD** da como resultado 1.

Usando como ejemplo el caso anterior, si sumamos **f(1)**, **f(2)**, **f(3)**, **f(4)** y **f(5)**, nos da:

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2+4+3+2+1}{12}=\frac{12}{12}=1$$

**Ejemplos de aplicaciones de función de probabilidad (resueltos paso a paso)**

1. Una telefonista de un centro medico recibe de 0 a 4 llamadas por hora. La función de probabilidad asociada a la cantidad de llamadas se muestra a continuación.

|  |
| --- |
| **Cantidad de llamadas por hora** |
| **xi** | **f(xi)** |
| **0** | **0,12** |
| **1** | **0,2** |
| **2** | **k** |
| **3** | **0,25** |
| **4** | **0,15** |

Determine el valor de **k** para que sea una función de probabilidad**.**

**Solución:**

Considerando la observación anterior, debemos considerar que las probabilidades **(valores del recorrido) deben sumar 1,** por lo tanto**:**

$$f\left(0\right)+f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)=1$$

Reemplazando los **valores evaluados** nos da:

$$0,12+0,2+k+0,25+0,15=1$$

Sumando los **valores decimales de la izquierda:**

$$0,72+k=1$$

Despejando **k:**

$$k=1-0,72$$

$$k=0,28$$

1. En un cierto dado usual cargado **(tendencioso o malicioso), están** modeladas sus probabilidades según la siguiente función

$$f\left(x\right)=P\left(X=X\_{i}\right)=\left\{\begin{array}{c}5p; si x es menor que 3\\0,1; si x es mayor o igual que 3\\0, en otro caso\end{array}\right.$$

1. Determine el valor de **p**
2. Determine el valor de **f(2)**

**Solución:**

Lo primero que debemos considerar es que el **dominio** en este caso es**:**

**x = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**

**Debido a que considera un dado usual y estos son de 6 caras.**

**Ra)** Lo segundo es **sumar los valores de probabilidad e igualar a 1,** por lo tanto**:**

$$f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)+f\left(5\right)+f\left(6\right)=1$$

$$5p+5p+0,1+0,1+0,1+0,1=1$$

Sumando **términos semejantes:**

$$10p+0,4=1$$

Despejando **p:**

$$10p=1-0,4$$

$$10p=0,6$$

$$p=\frac{0,6}{10}$$

$$p=0,06$$

**Rb)** Para obtener **f(2),** debemos ver cuanto originalmente es **el valor de f(2)**

$$f\left(2\right)=5p$$

Como **p = 0,06**

$$f\left(2\right)=5p=5∙0,06=0,3$$

Por lo tanto**, f(2) = 0,03**

1. **La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X está dada por la siguiente tabla**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **X** | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** |
| **P(X = xi)** | **0,05** | **0,25** | **0,17** | **0,33** | **0,25** |

**¿**Cuál sería el valor de **P(X > 30)?** y **¿**Cuánto sería el valor de **P(X ≤ 20)?**

**Solución:**

Para determinar **P(X > 30),** debemos considerar estrictamente **los valores que sean mayor a 30 sin incluir este,** por lo tanto**:**

$$P\left(X>30\right)=P\left(X=40\right)+P\left(X=50\right)$$

Y reemplazando los valores, nos queda

$$P\left(X>30\right)=P\left(X=40\right)+P\left(X=50\right)$$

$$P\left(X>30\right)=0,33+0,25$$

$$P\left(X>30\right)=0,58$$

Para determinar **P(X ≤ 20),** debemos considerar **los valores menores que el 20** pero **INCLUYENDO** a este también, por lo tanto**:**

$$P\left(X\leq 20\right)=P\left(X=10\right)+P(X=20)$$

$$P\left(X\leq 20\right)=0,05+0,25$$

$$P\left(X\leq 20\right)=0,30$$